n° 4 — 4ème Semestre

Lycée Laymoun — 2ème BAC Pro

Les nombres complexes
1er partie

① Représentation des nombres complexes :

Déf : 1) On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nbres complexes

2) Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tq : $\boxed{i^2 = -1}$

3) Tout élét : z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $\boxed{z = a + ib}$ avec : a ; b sont réels.

4) on note :

$\begin{cases} a = Re(z) \text{ la partie réelle de } z \\ b = Im(z) \text{ la partie imaginaire de } z \end{cases}$

- si $a = 0$; z est appelé imag pur.
- si $b = 0$; z est un nbre réel.
- $a + ib$ est **l'écriture algébrique** de z.

Exple : $Re\left(3 - \frac{2}{5}i\right) =$

$Im\left(3 - \frac{2}{5}i\right) =$

② Règles de calcul :

Soient $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$ deux nbrs complx

◇ Egalité : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

◇ Somme : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

◇ produit : $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

◇ Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

◇ quotient : $\frac{z}{z'} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2}$

Ex : 1 Ecrire sous la forme $x + iy$:

1° $\frac{1+i}{i}$ 4° $\frac{i}{i+1}$ 7° $\frac{3}{i+1} - \frac{1}{2i}$

2° $\frac{i-4}{2i}$ 5° $\frac{3+4i}{i-1}$

3° $\frac{2}{4-i}$ 6° $\frac{i-3}{i+3}$

③ Conjugué d'1 nbre complexe

Déf : on appelle conjugué de $z = a + ib$; le nombre complexe noté $\overline{z}$ tq : $\boxed{\overline{z} = a - ib}$

Prop : $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$

$z = z' \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{(\overline{z})} = z$

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

si $z' \neq 0$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier :

$z + \overline{z} = 2 \times Re(z)$; $z - \overline{z} = 2 Im(z)$

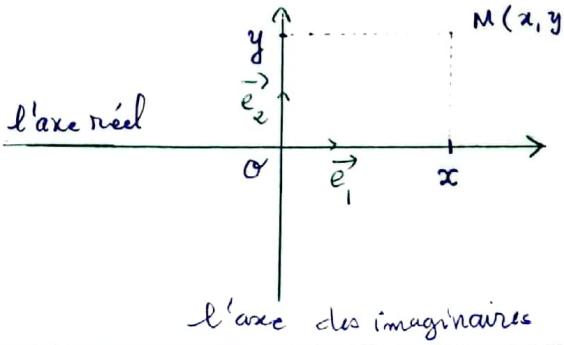
z imagin pur $\Leftrightarrow \boxed{z + \overline{z'} = 0}$

z réel $\Leftrightarrow \boxed{z = \overline{z'}}$

④ Le plan Complexe :

On muni le plan d'1 repère orthonormé $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$

$z = x + iy$ est représenté par le pt : $M(x ; y)$. on dit que : M est l'image de z et que : z est **l'affixe** du pt M :



n° 7

Scanné avec CamScanner

⑤ Module d'un nombre complexe.

Déf Le module de $z = a+ib$ c'est : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Prop : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (avec : $z \neq 0$)

Ex:2| Calculer le module de :

$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+\sqrt{2}-5i$

$z_3 = z_1 \times z_2$

⑥ Argument d'un nobre complx non nul

Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et M son image. L'argument θ de z est l'un des mesure de l'angle $(\vec{e_1}; \vec{OM})$.

On le note : $\arg(z)$ et on écrit :

$$\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$$

⑦ La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un complx $\neq 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$.

on pose : $r = |z|$ et $\text{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi]$

- La forme trigonométrique de z c'est :

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [r; \theta]$

- La notation exponentielle de z c'est :

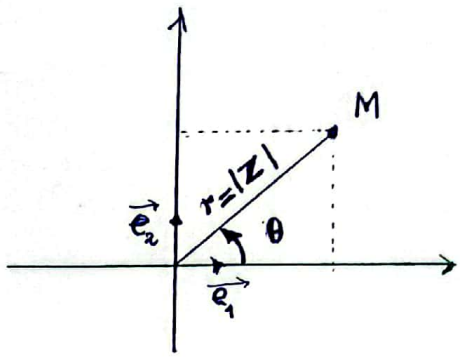
$z = re^{i\theta}$

Req : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

⚠ Cas particuliers :

si $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a; 0]$	$a = [-a; \pi]$
$ai = [a; \frac{\pi}{2}]$	$ai = [-a; -\frac{\pi}{2}]$



Ex: 3| ① Calculer l'argument de :

$z_1 = i$; $z_2 = 1$; $z_3 = -1$

$z_4 = i^3$; $z_5 = z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4$

② Donner la forme trigonométrique de :

$z_1 = i$; $z_2 = 3$; $z_3 = (2i)^3$

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3}i$

Req : pour trouver la forme trigonométrq de $z = x+iy$ on calcul r et θ

avec : $r = \sqrt{x^2+y^2}$

θ est determiné dès que'on calcul $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

et en utilisant le tableau :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Scanné avec CamScanner